Concours des 28,29 et 30 mai 1985 d'admission en 1-ère année à L'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

MATHÉMATIQUES
(Options M.P.T.)

(à distribuer aux candidats)

NOTA :
Le candidat pourra admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'il ne les a pas démontrés.
NOTATIONS :
Soient a et b deux réels avec $a < b$. Toute application de $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$ s'écrit de manière unique $f(t) = g(t) + ih(t)$ où g et h sont deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. On rappelle les résultats suivants :

1) f est continue si et seulement si g et h le sont ;
2) f est alors intégrable et on a :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b h(t)\mathrm{d}t.$$
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
3) $\displaystyle\int_a^b e^{i\alpha t}\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\right) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ b-a & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$

Partie ❶

On donne l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0 \text{ où } k \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Q1. Déterminer la relation de récurrence vérifiée par les a_n pour que la somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$ soit solution de (1) sur un intervalle non vide $]-\alpha,\alpha[$. (On admettra provisoirement que le rayon de convergence d'une telle série est non nul).

Q2. Montrer qu'alors $a_n = 0$ dans les deux cas suivants : $n-k$ est impair, n est strictement inférieur à k. Achever la détermination des a_n et préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$.

Partie ❷

On pose dans toute la suite du problème :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \ \forall x \in \mathbf{R}\ \ \begin{cases} J_k(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^k \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(k+p)!p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \\ J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \end{cases} \tag{2}$$

Q1. Prouver les égalités suivantes :

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \ \forall x \in \mathbf{R}\ \ \begin{cases} x(J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)) = 2kJ_k(x) \\ J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J_k'(x) \end{cases} \tag{3}$$

Q2. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ I_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta} e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

Montrer que l'on peut se borner au calcul des I_k avec $k \in \mathbf{N}$.

On fixe x dans $\mathbf{R}$ et on pose :

$$\forall N \in \mathbf{N},\ \ \forall k \in \mathbf{N},\ \ I_{k,N}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n x^n \sin(\theta)^n}{n!}\right)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

Trouver un majorant de $\left|e^{ix\sin\theta} - \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{i^n x^n(\sin\theta)^n}{n!}\right|$ ne dépendant que de x et N. En déduire un majorant de $|I_k(x) - I_{k,N}(x)|$ ne dépendant que de x et N.
Prouver $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} I_{k,N}(x)$.

Q3. Calculer, pour tout couple (k,n) de $\mathbf{N}^2$, $(2i)^n\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^n e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$.
En déduire l'expression de $I_{k,N}(x)$ et un développement en série entière de $I_k(x)$ dont on précisera le rayon de convergence.
Vérifier que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, $I_k(x) = J_k(x)$.

Q4. Déduire des résultats précédents l'existence d'un $M > O$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \ \forall k \in \mathbf{Z}\ \ |J_k(x)| \leq M \tag{6}$$

Montrer alors par récurrence en utilisant les formules (3) que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \ \forall k \in \mathbf{Z},\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |J_k^{(n)}(x)| \leq M \tag{7}$$

Q5. Soit a un réel non nul tel que $J_k(a) = J_k'(a) = 0$.
Montrer qu'alors : $\forall n \in \mathbf{N}$, $J_k^{(n)}(a) = 0$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange au point a, que les inégalités (7) conduisent à : $\forall x \in \mathbb{R}$, $J_k(x) = 0$, et que l'on arrive ainsi à une contradiction.
Peut-on avoir pour un réel a non nul $J_k(a) = J_{k+1}(a) = 0$?

Partie ❸

On se borne dans cette partie à x variant dans $]0,+\infty[$.

Q1. On considère l'équation (1) pour $k = 0$, $xy'' + y' + xy = 0$, dans laquelle on fait le changement de fonction inconnue défini par $u(x) = \sqrt{x}y(x)$.
Montrer que u vérifie l'équation différentielle :

$$u'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)u = 0 \tag{8}$$

Soit v une solution quelconque de l'équation différentielle $v'' + v = 0$ et $\varphi = uv' - u'v$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ \varphi'(x) = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}.$$

En déduire :

$$\forall \alpha \in]0,+\infty[,\ \ u(\alpha+\pi) + u(\alpha) + \int_\alpha^{\alpha+\pi}\frac{u(x)\sin(x-a)}{4x^2}\mathrm{d}x = 0 \tag{9}$$

Q2. Montrer à partir de (13) que, pour tout $a > 0$, $J_0(x)$ s'annule en changeant de signe en un point de $]\alpha,\alpha+\pi[$.

Q3. Obtenir à partir des formules (3) une relation entre $J_{k+1}(x)$ et la dérivée de $\dfrac{J_k(x)}{x^k}$.
Montrer alors qu'entre deux racines positives distinctes de J_k, il existe une racine de J_{k+1}. L'ensemble des racines de J_k est-il borné supérieurement ?

Un corrigé

Q1. Si y est une solution de l'équation différentielle (1) qui s'écrit, pour un certain $\alpha > 0$,

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \ \ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

alors on a, par dérivation terme à terme d'une série entière :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \ \ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ \text{ et } \ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Donc y est solution de (1) si, et seulement si, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$,

$$\begin{aligned}
xy''(x) + xy' + (x^2 - k^2)y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= -k^2 a_0 + (1-k^2)a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} \left((n^2 - k^2)a_n + a_{n-2}\right) x^n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière cela est équivaut à :

$$\begin{cases} k^2 a_0 = 0 \\ (1-k^2)a_1 = 0 \\ (n^2 - k^2)a_n = -a_{n-2}, \ \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Q2. • Si $k = 0$, $a_1 = 0$ et la relation $(n^2 - k^2)a_n = -a_{n-2}, \ \ \forall n \geq 2$ montre que tous les coefficients d'indice impair sont nuls, c'est-à-dire $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
• Si $k = 1$, $a_0 = 0$ puis $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
• Si $k > 1$, $a_0 = a_1 = 0$ et la relation $(n^2 - k^2)a_n = -a_{n-2}$ montre que $a_2 = a_3 = ... = a_{k-1} = 0$.
• Si $n - k$ est impair, deux cas sont possibles. $n = 2p$ et $k = 2l + 1$ et dans ce cas $a_0 = 0$ puis $a_n = 0$, ou bien $n = 2p + 1$ et $k = 2l$ et dans ce cas $a_1 = 0$ puis $a_n = 0$.
Finalement $a_n = 0$ si $n - k$ est impair ou si $n < k$.
Si $n = k + 2p$, on obtient les relations $a_{k+2p} = \dfrac{(-1)^p k!}{4^p p!(p+k)!} a_k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Posons alors $E_k = \{ n \in \mathbb{N} \mid n - k \text{ est impair et } n \geq k \}$ et $F_k = \{ n \in \mathbb{N} \mid n - k \text{ est pair et } n \geq k \}$.
D'où, pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, on a :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n + \sum_{n \in E_k} a_n x^n + \sum_{n \in F_k} a_n x^n.$$

Les deux premières sommes sont nulles, donc

$$y(x) = \sum_{n \in F_k} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{k+2p} x^{k+2p} = k! a_k \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

La règle de D'Alembert montre que la série précédente converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc son rayon de convergence est infini : $\alpha = +\infty$.

Partie II

Q1. • Si $k \in \mathbf{N}^*$, calculons la dérivée de $x \mapsto x^k J_k(x)$. On a :

$$x^k J_k(x) = 2^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(k+p)!p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(p+k)}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k J_k(x)\right) = 2^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2(p+k)}{(k+p)!p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(p+k)-1} = x^k \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(k-1+p)!p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = x^k J_{k-1}(x).$$

De même,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-k} J_k(x)\right) = -x^{-k} J_{k+1}(x).$$

Donc $\frac{k}{x}J_k(x) + J_k'(x) = J_{k-1}(x)$, $-\frac{k}{x}J_k(x) + J_k'(x) = J_{k+1}(x)$ qui donnent les deux relations demandées lorsque $k \in \mathbf{N}^*$.

• Si $k \in \mathbf{Z}^*$, $k \leq -1$, alors

$$\begin{aligned}
x(J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)) &= x((-1)^{-k+1}J_{-k+1}(x) + (-1)^{-k-1}J_{-k-1}(x)) \\
&= -(-1)^{-k}x(J_{-k+1}(x) + J_{-k-1}(x)) \\
&= -(-1)^{-k}(-2kJ_{-k}(x) \\
&= 2kJ_k(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x(J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)) &= x((-1)^{-k+1}J_{-k+1}(x) - (-1)^{-k-1}J_{-k-1}(x)) \\
&= -(-1)^{-k}x(J_{-k+1}(x) - J_{-k-1}(x) \\
&= -(-1)^{-k}(-2kJ'_{-k}(x) \\
&= 2J_k'(x).
\end{aligned}$$

• Si $k = 0$, $x(J_{-1}(x) + J_1(x)) = x(-J_1(x) + J_1(x) = 0$ et $J_{-1}(x) - J_1(x) = -2J_1(x)$. Mais

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_0(x)\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2p}{p!p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-1} = -\frac{x}{2}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(1+p-1)!(p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(p-1)} = -J_1(x).$$

D'où $J_{-1}(x) - J_1(x) = 2J_0'(x)$.
Finalement les deux relations de (3) sont bien vérifiées pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et tout $x \in \mathbf{R}$.

Q2. • Si k est un entier négatif, on a : $I_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix\sin t}e^{ikt}\mathrm{d}t = I_{-k}(-x)$. Donc on peut se limiter au calcul des I_k avec $k \in \mathbb{N}$.

• Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $e^{is\sin\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n (\sin\theta)^n}{n!}$ et donc pour tout $N \in \mathbf{N}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\left| e^{is\sin\theta} - \sum_{n=0}^{N} \frac{i^n x^n (\sin\theta)^n}{n!} \right| &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{i^n x^n (\sin\theta)^n}{n!} \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{i^n x^n (\sin\theta)^n}{n!} \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Si $a > 0$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle sur $[0, a]$:

$$e^a = \sum_{n=0}^{N} \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-t)^N}{N!} e^t \mathrm{d}t$$

ce qui implique

$$\left|e^a-\sum_{n=0}^{N}\frac{a^n}{n}\right|\leq\frac{e^a}{N!}\int_0^a(t-a)^N\mathrm{d}t=e^a\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

En utilisant cette inégalité, on peut déduire :

$$|I_k(x)-I_{k,N}(x)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{|x|}}{(N+1)!}|x|^{N+1}\mathrm{d}t\leq e^{|x|}\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

Le terme à droite tend vers 0 quand N tend vers l'infini, d'où $\lim\limits_{N\to\infty}I_{k,N}(x)=I_k(x)$.

Q3. Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(2i)^n(\sin\theta)^n e^{-ik\theta} &= \left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^n e^{-ik\theta}\\ &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathtt{C}_n^p e^{i\theta(n-k-2p)}\end{aligned}$$

D'où :

$$(2i)^n\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^n e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\mathtt{C}_n^p\int_0^{2\pi}e^{i\theta(n-k-2p)}\mathrm{d}\theta.$$

• Si $n-k$ est impair, alors $n-k-2p$ est non nul et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i\theta(n-k-2p)}\mathrm{d}\theta=0.$

• Si $n-k$ est pair de la forme $2l$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i\theta(n-k-2p)}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}e^{i\theta(2l-2p)}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0 & \text{si } p\neq l\\ 2\pi & \text{si } p=l\end{cases}.$

Ainsi, si $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}I_{k,N}(x) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x}{2}\right)^n(2i)^n\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^n e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x}{2}\right)^n a_{n,k}\end{aligned}$$

où $a_{n,k}=(2i)^n\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin\theta)^n e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$. D'où $I_k(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n a_{n,k}=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p}a_{k+2p,k}=J_k(x).$

Q4. Soient $x\in\mathbf{R}$ et $k\in\mathbf{N}$. Puisque $J_k(x)=I_k(x)$ et $|I_k(x)|\leq\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|e^{ix\sin\theta}e^{-ik\theta}|\mathrm{d}\theta\leq 1$. Donc $|J_k(x)|\leq 1$. Les relations (2) montrent que les inégalités restent vraies pour $k\in\mathbf{Z}$.
La formule $2J_k'(x)=J_{k-1}(x)-J_{k+1}(x)$ entraîne que $2|J_k'(x)|\leq|J_{k-1}(x)|+|J_{k+1}(x)|\leq 2$. Supposons donc que $|J_k^{(l)}(x)|\leq 1$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et pour tout $l\in[\![0,n-1]\!]$.
Les formules (3) montrent que $J_{k-1}^{(n)}(x)-J_{k+1}^{(n)}(x)=2J_k^{(n+1)}(x)$. Donc $2|J_k^{(n+1)}(x)|\leq J_{k-1}^{(n)}(x)|+|J_{k+1}^{(n)}(x)|\leq 2$ ou encore $|J_k^{(n+1)}(x)|\leq 1$.

Q5. • Comme J_k est une solution de l'équation différentielle (1) et a est non nul, alors $J_k''(a)=0$. D'autre part, en dérivant n fois l'équation différentielle (1), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2J_k(x)\right)+\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(xJ_k'(x))+\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-k^2)J_k(x)=0.$$

À l'aide de la formule de Leibnitz, on obtient :

$$\begin{aligned}0 &= \mathtt{C}_n^0x^2J_k^{(n+2)}(x)+\mathtt{C}_n^1 2xJ_k^{(n+1)}(x)+\mathtt{C}_n^2 2J_k^{(n)}(x)\\ &\quad+\mathtt{C}_n^0xJ_k^{(n+1)}(x)+\mathtt{C}_n^1 2J_k^{(n)}(x)\\ &\quad+\mathtt{C}_n^0(x^2-k^2)J_k^{(n)}(x)+\mathtt{C}_n^1 2xJ_k^{(n-1)}(x)+\mathtt{C}_n^2 2J_k^{(n-2)}(x)\\ &= x^2J_k^{(n+2)}(x)+(2n+1)xJ_k^{(n+1)}(x)+(n(n+1)+x^2-k^2)J_k^{(n)}+n(n-1)J_k^{(n-1)}(x)+n(n-1)J_k^{(n-2)}(x)\end{aligned}$$

Cette relation permet, par de récurrence, de montrer que $J_k^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
La formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à J_k qui est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, entre a et x s'écrit :

$$\begin{aligned} J_k(x) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{J_k^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} J_k^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t && (10) \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} J_k^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t && (11) \end{aligned}$$

Donc $|J_k(x)| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} J_k^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| \mathrm{d}t \right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ et ceci pour tout $x \in \mathbf{R}$. Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $\forall x \in \mathbf{R}$, $J_k(x) = 0$ ce qui est absurde. Donc un tel a n'existe pas.
• Si $J_k(a) = J_{k+1}(a) = 0$, alors les formules (3) donne $J_{k-1}(a) = 0$ et puis $J_k'(a) = 0$. Ceci est absurde d'après ce qui précède.

Partie III

Q1. • Si $y(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$, ($x > 0$),

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\left[x^2u''(x) + \left(\frac{1}{4} + x^2\right)u(x)\right].$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par u :

$$u'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)u = 0 \tag{12}$$

• Si $v'' + v = 0$ et u solution de (12), alors pour tout $x > 0$:

$$(uv'' - u''v)(x) = -u(x)v(x) + \left(\frac{1}{4x^2} + 1\right)u(x)v(x) = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}.$$

On remarque que $(uv' - v'u)' = uv'' - u''v$ d'où, pour $\alpha \in]0, +\infty[$:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{u(x)v(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} (uv'' - uv'')(x)\mathrm{d}x = \left[(uv' - u'v)\right]_{\alpha}^{\alpha+\pi}.$$

La fonction $v : x \mapsto \sin(x - \alpha)$ vérifie $v'' + v = 0$ donc d'après ce qui précède, si u vérifie (12), on a :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{u(x)\sin(x-a)}{4x^2}\mathrm{d}x = -u(\alpha+\pi) - u(\alpha) \tag{13}$$

Q2. Supposons que J_0 ne s'annule pas sur $[\alpha, \alpha+\pi[$. Alors, par continuité, J_0 serait de signe constant sur cet intervalle, notons

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si si } J_0 > 0 \text{ sur } [\alpha, \alpha+\pi[\\ -1 & \text{si si } J_0 < 0 \text{ sur } [\alpha, \alpha+\pi[\end{cases}.$$

Dans ces conditions, $u : x \mapsto \varepsilon\sqrt{x}J_0(x)$ serait strictement positive sur $[\alpha, \alpha+\pi[$ et solution de (12). On aurait alors $-u(\alpha) - u(\alpha+\pi) \leq 0$ et $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \frac{u(x)\sin(x-\alpha)}{4x^2}\mathrm{d}x > 0$ (intégrale d'une fonction continue, strictement positive sur $]\alpha, \alpha+\pi[$ avec $\alpha < \alpha+\pi$), ce qui fournit une contradiction d'après (13). Il existe donc $x_\alpha \in [\alpha, \alpha+\pi[$ tel que $J_0(x_\alpha) = 0$. Enfin, en appliquant ce résultat à tous les intervalles $[\alpha + n\pi, \alpha + (n+1)\pi[$, on obtient une infinité de zéros de J_0 sur $\mathbf{R}$.

Q3. • Les relations (3) donnent $xJ_{k+1}(x) = kJ_k(x) - xJ_k'(x)$. D'autre part

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{J_k(x)}{x^k}\right) = \frac{x^k J_k'(x) - kx^{k-1}J_k(x)}{x^{2k}}$$

En tenant compte de la relation précédente on obtient l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{J_k(x)}{x^k}\right) = \frac{-J_{k+1}(x)}{x^k}.$$

Si a et b sont deux racines positives de J_k, alors d'après le théorème de Rolle, il existe une racine c de J_k' entre a et b, et d'après l'égalité précédente cette racine c est aussi une racine de J_{k+1}.
• Montrons par récurrence que sur k que J_k admet des racines sur chaque intervalle $[\alpha + n\pi, \alpha + (n+1)\pi[$ ce qui implique que leur ensemble n'est pas borné.
En effet, d'après ce qui précède, il existe donc $x_\alpha \in [\alpha, \alpha + \pi[$ tel que $J_0(x_\alpha) = 0$. En appliquant ce résultat à tous les intervalles $[\alpha + n\pi, \alpha + (n+1)\pi[$, on obtient une infinité de zéros de J_0 sur $\mathbf{R}^+$, il est donc de même de la fonction J_1 (d'après ce qui précède).
On note $\forall n \in \mathbf{N}^*$, Z_n l'ensemble des zéros de J_k sur $]0, n]$ et supposons qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que Z_n soit infini.
Donc J_k admet une suite $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de zéros dans $]0, n]$ à éléments deux à deux distincts. La suite $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est bornée donc, d'après Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. Posons l sa limite. On a J_k continue sur $\mathbf{R}$ et $\lim\limits_{p\to\infty} x_{\varphi(p)} = l$ donc $\lim\limits_{p\to\infty} J_k(x_{\varphi(p)}) = J_k(l)$ et puisque $\forall p \in \mathbf{N}$, $J_k(x_{\varphi(p)}) = 0$ donc $\lim\limits_{p\to\infty} J_k(x_{\varphi(p)}) = 0$ d'où $J_k(l) = 0$ par unicité de limite. On déduit que l est un zéro de J_k.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\lim\limits_{p\to\infty} x_{\varphi(p)} = l$ donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}, \forall p \geq n_0, |x_{\varphi(p)} - l| \leq \varepsilon$. La suite $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est à éléments deux à deux distincts donc il existe $p \geq n_0$, $x_{\varphi(p)} \neq l$ d'où $x_{\varphi(p)} \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\setminus\{l\}$ et $x_{\varphi(p)}$ est un zéro de J_k.
On déduit que l est un zéro non isolé de J_k, ce qui est absurde car tous les zéros de J_k sont isolés[1], donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, Z_n est fini. L'ensemble Z des zéros de J_k sur $]0, +\infty[$ est $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} Z_n$ donc Z est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.
Notons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des zéros strictement croissante positifs de J_k. Soit $A > 0$. D'après la question précédente, l'ensemble des zéros de J_k dans $]0, E(A) + 1]$ est fini et puisque J_k admet une infinité de zéros, alors il existe $N \in \mathbf{N}$, $y_N > E(A) + 1 > A$. Or la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $\forall n \geq N$, $y_k \geq y_N > A$ d'où $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$[2].

---

1. On a J_k définie sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $J_k(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+k}$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p+k}$ est infini. On pose f sa somme donc f est définie et holomorphe sur $\mathbf{C}$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $J_k(x) = f(x)$ donc f est un prolongement de J_k en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. Soit g un prolongement de J_k en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ et $h = f - g$. On a :
   1. $\mathbf{C}$ ouvert connexe par arcs.
   2. f et g holomorphes sur $\mathbf{C}$ donc g est holomorphes sur $\mathbf{C}$.
   3. $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - g(x) = J_k(x) - J_k(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, x est un zéro non isolé de h.

   Donc, d'après le principe des zéros isolés, $h = 0$ sur $\mathbf{C}$ d'où $g = f$ sur $\mathbf{C}$. On déduit que f est l'unique prolongement de J_k en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$.

   On a J_k non nulle car $J_k^{(k)}(0) = \frac{1}{2^k} \neq 0$ donc son prolongement f sur $\mathbf{C}$ est non nulle et puisque f est holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui est ouvert connexe par arcs donc, d'après le principe des zéros isolés, les zéros de f sont isolés et par suites ceux de J_k sont aussi isolés.
2. En ce qui concerne cette question, j'espère que les lecteurs proposeront une réponse, si elle est plus simple que la réponse proposée dans ce corrigé. e-mail : medtarqi@yahoo.fr